УДК 521.1

А. М. Молчанов, Г. А Шишловская

Пущино, СССР

РЕЗОНАНСЫ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Резонансные явления в разных областях естествознания привлекают все большее внимание исследователей. Однако развитие теории серьезно отстает от практических запросов. Даже реальность резонанса (особенно в небесной механике) является нередко предметом споров. Настоящий доклад посвящен уточнению понятия резонанса.

Резонанс в невозмущенной системе. В приложениях изучаемая система обычно содержит малый параметр ε, причем невозмущенная система (при $\varepsilon = 0$) оказывается интегрируемой. Поэтому систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_k}{dt} &= \omega_k(I) + \varepsilon\Omega_k(I, \varphi, \varepsilon), \\ \frac{dI_k}{dt} &= \qquad\qquad \varepsilon F_k(I, \varphi, \varepsilon). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь φ_k — фазы, I — первые интегралы (импульсы в случае гамильтоновых систем) невозмущенной системы. При $\varepsilon = 0$ I остаются постоянными во времени, а фазы линейны по t с постоянными частотами ω_k.

Введем «комбинационную» частоту с целочисленными множителями n_α:

$$\nu(I) = n_1\omega_1(I) + \cdots + n_s\omega_s(I). \tag{2}$$

Обычное понимание резонанса — равенство нулю резонансной частоты

$$\nu(I) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) определяет поверхность в пространстве импульсов. Обычно резонансная частота мала, но отлична от нуля. Возникающие разногласия — «достаточно ли мала частота ν, чтобы считать резонанс реальностью» — носят весьма субъективный характер. Для объективного решения надо отказаться от рассмотрения только невозмущенной системы и учесть влияние возмущений.

Главный член резонансного движения. Для уточнения характера движения вблизи резонансной поверхности введем новые переменные — резонансную фазу и резонансную частоту:

$$\begin{aligned} \psi &= n_1\varphi_1 + \cdots + n_s\varphi_s, \\ \nu &= n_1\omega_1 + \cdots + n_s\omega_s \end{aligned} \tag{4}$$

и напишем для них уравнения, вытекающие из системы (1). Несложные выкладки приводят к результату:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \nu + \varepsilon a(I, \varphi, \varepsilon); \\ \frac{d\nu}{dt} &= \qquad \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon). \end{aligned} \tag{5}$$

Вблизи резонансной поверхности ($\nu = 0$) можно осреднить правые части системы (5) по быстрым фазам φ. Нельзя, однако, осреднять по всем фазам. Следует учесть, что хотя каждая фаза быстрая, существует резонансная комбинация ψ, более медленная, чем каждая из фаз φ_k. Поэтому нужно перейти к новой системе фаз ψ,

$$\vec{\psi} = A\vec{\varphi}; \quad \vec{\varphi} = B\vec{\psi} \tag{6}$$

IX Международная конференция по нелинейным колебаниям. Т. 3.
Киев: Наукова думка, 1984.

при помощи целочисленной унимодулярной (для того чтобы и обратная матрица $B = A^{-1}$ также была целочисленной) матрицы A. Новая система фаз должна начинаться с ψ:

$$\vec{\psi} = (\psi, \psi_1, \ldots, \psi_{s-1}). \tag{7}$$

Подставив затем вместо φ из выражения через ψ:

$$\varphi_k = m_k\psi + m_{k_1}\psi_1 + \cdots + m_{k_{s-1}}\psi_{s-1}, \tag{8}$$

осредним правые части (5) по всем фазам $\psi_1, \ldots, \psi_{s-1}$, кроме резонансной ψ.

Получится (в главном члене) «резонансная система».

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \nu + \cdots, \\ \frac{d\nu}{dt} &= \varepsilon f(I, \psi) + \cdots, \end{aligned} \tag{9}$$

имеющая «резонансный первый интеграл»

$$\frac{\nu^2}{2} + \varepsilon W(I, \psi) = \text{const}. \tag{10}$$

Этот «первый интеграл» не является точным. С учетом членов порядка ε^2 он, вообще говоря, перестает быть первым интегралом. Зато он возникает из любых систем вида (1) (а не только гамильтоновых). Наиболее интересный случай — негамильтоновы возмущения (например, диссипативные возмущения) гамильтоновых систем.

Резонансная зона. Перечислим выводы, вытекающие из анализа «резонансного интеграла», определяющего структуру резонансной зоны.

1. Резонансная зона образует в пространстве импульсов слой по обе стороны от резонансной поверхности $\nu = 0$.

2. Толщина слоя $\nu \sim \sqrt{\varepsilon}\,\Delta(I)$, где величина $\Delta(I)$ определяется величиной коэффициента Фурье, соответствующего резонансной фазе [функция $f(I, \psi)$ в системе (9)].

3. Внутри зоны резонансная фаза совершает ограниченные колебания. Вне зоны фаза становится неограниченно растущей (или убывающей).

4. Вдоль резонансного слоя движение более медленное (со скоростью $\sim\varepsilon$), чем поперек (резонансное движение «полубыстрое» — со скоростью $\sim\sqrt{\varepsilon}$).

Перечисленные свойства позволяют высказать следующую гипотезу.

Гипотеза нейтральности. Для гамильтоновых систем любой резонанс нейтрален. Теоремы о неустойчивости гамильтоновых резонансов относятся только к локальным (ψ близко к равновесию) свойствам.

Внутри резонансной зоны — в малом по импульсам ($\nu \sim \sqrt{\varepsilon}$) и в большом по фазе ($0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$) — движение всегда остается ограниченным.

Отсюда следует **критерий резонансности.** Для резонансности движения необходимо и достаточно ограниченности резонансной фазы.